09-11-20

Πρόσθεση - Βαθμωτός πολλαπλασιασμός οριζουσών:

$$D=\begin{vmatrix} k a_{11}+m b_{11} & \dots & k a_{1n}+m b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2.$$

Πχ $$\begin{vmatrix} 3t^2+2 & t-\sin t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3t^3 & t \\ \cos 3t & 2+e^t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -\sin t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} t^2 & \frac{1}{3}t \\ \cos 3t & e^t \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sin t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix}$$

Πχ Άσκηση 3, σελ. 80: Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες ή γραμμικά ανεξάρτητες.

$f_1(x)=1$, $f_2(x)=t$, $f_3(x)=|t|$, $S_1=[0,2020]$, $S_2=[-1,1]$

<u>Λύση</u>: Όσον αφορά το σύνολο S_1, εύκολα παρατηρούμε ότι για $c_1=0$, $c_2=1$, $c_3=-1$ έχουμε:

$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)+c_3 f_3(t)=0\cdot 1+1\cdot t+(-1)\cdot|t|=0+t-t=0$, $\forall t\in[0,2020]$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 είναι γρ. εξαρτημένες στο S_1.

- Για το σύνολο S_2 έχουμε:

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+c_3f_3(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1: & c_1+c_2+c_3=0 \\ t=0: & c_1=0 \\ t=-1: & c_1-c_2+c_3=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

που σημαίνει ότι οι f_1, f_2, f_3 είναι γρ. ανεξάρτητες στο S_2.

$\boxed{*}$ Η απεικόνιση $L: C^n(I)\to C(I)$ με

$L(\varphi)(t)=a_n(t)\varphi^{(n)}(t)+\dots+a_0(t)\varphi(t)$

καλείται διαφορικός τελεστής της δ.ε. (E).

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Ο διαφορικός τελεστής L είναι ένας γραμμικός τελεστής.

$\boxed{\text{Θεώρημα (5)}}$: **(Liouville)**: Ας είναι $t_0 \in I$ και $y_1 \dots y_n \in C^n(I)$ λύσεις της ομογενούς γ.δ.ε. n-τάξης (E_0^n):

$$W(y_1,\dots,y_n)(t) = W(y_1,\dots,y_n)(t_0)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_0(s)}ds}, \; t\in I$$

Απόδειξη: Είναι:

$$\frac{d}{dt}W(y_1,\dots,y_n)(t) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

απ' όπου έχουμε $\frac{d}{dt}W(y_1,\dots,y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n}y_1^{(n-1)} - \dots - \frac{a_0}{a_n}y_1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n}y_2^{(n-1)} - \dots - \frac{a_0}{a_n}y_2 & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n}y_n^{(n-1)} - \dots - \frac{a_0}{a_n}y_n \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{a_n}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \cdots - \frac{a_0}{a_n}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{a_0}{a_n} W(y_1,\ldots,y_n)(t)$$

δηλαδή η ορίζουσα ικανοποιεί την γ.δ.ε. πρώτης τάξης:

$W'(y_1,\ldots,y_n)(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} W(y_1,\ldots,y_n)(t) = 0$, $t \in I$, έπεται το ζητούμενο.

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$: Αν $\{y_1(t),\ldots,y_n(t)\}$ είναι λύσεις της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n) τότε είτε $W(t)=0, \forall t \in I$ είτε $W(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Πχ Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων:

$y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^t(t-1)$, $y_3(t) = 2e^t - e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$

με δεδομένο ότι οι λύσεις είναι της εξίσωσης: $y''' -$

Λύση:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^t(t-1) & 2e^t - e^{2t} \\ e^t & e^t t & 2e^t - 2e^{2t} \\ e^t & e^t(t+1) & 2e^t - 4e^{2t} \end{vmatrix} \underset{t=0}{\overset{\text{για}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

απ' όπου με χρήση του τύπου Liouville, έχουμε:

$$W(t) = W(0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_0(s)} ds} = -1 \cdot e^{-\int_0^t \frac{-4}{1} ds} = -e^{4t}, \ t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς γ.δ.ε. (E_n^0) καλείται βασικό σύνολο λύσεων της (E_n^0)

$\boxed{\text{Θεώρημα (6)}}$: Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων της ομογενούς γρ. διαφορικής εξίσωσης (E_n^0).

Απόδειξη: Για τις μονοσήμαντα ορισμένες λύσεις $\{y_1(t),\ldots,y_n(t), t \in I\}$ των π.α.τ. που απαρτίζονται από την εξίσωση (E_n^0) και τις αρχικές συνθήκες: $y_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_{i,j}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$

→

δηλαδή, $y_1(t_0)=1$, $y_1'(t_0)=0$ ... $y_1^{(n-2)}(t_0)=0$ $y_1^{(n-1)}(t_0)=0$

$y_2(t_0)=0$, $y_2'(t_0)=0$ ... $y_2^{(n-2)}(t_0)=0$ $y_2^{(n-1)}(t_0)=0$

$y_3(t_0)=0$, $y_3'(t_0)=0$ ... $y_3^{(n-2)}(t_0)=0$ $y_3^{(n-1)}(t_0)=0$

... ...

$y_{n-1}(t_0)=0$ $y_{n-1}'(t_0)=0$ ... $y_{n-1}^{(n-2)}(t_0)=0$ $y_{n-1}^{(n-1)}(t_0)=0$

$y_n(t_0)=0$ $y_n'(t_0)=0$ ... $y_n^{(n-2)}(t_0)=0$ $y_n^{(n-1)}(t_0)=0$

Επομένως είναι: $W(y_1,..,y_n)(t_0)=\det I=1\neq 0$
και συνεπώς οι λύσεις $\{y_1(t),..,y_n(t), t\in I\}$ αποτελούν βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (E_n^0).

Θεώρημα (7): Ας είναι $\{y_1(t),..,y_n(t), t\in I\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γ.δ.ε. (E_n^0), τότε για κάθε λύση y της εξίσωσης υπάρχουν n μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές $\{c_1,..,c_n\}$ έτσι ώστε $y(t)=c_1y_1(t)+...+c_ny_n(t)$, $t\in I$.

Απόδειξη: Ας είναι $\{y_1(t),..,y_n(t), t\in I\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γ.δ.ε. (E_n^0) και y μία λύση της εξίσωσης.
Για $t_0\in I$, θεωρούμε το (αλγεβρικό) γραμμικό σύστημα $n\times n$

$c_1y_1(t_0)+..+c_ny_n(t_0)=y(t_0)$

$c_1y_1'(t_0)+..+c_ny_n'(t_0)=y'(t_0)$

....

$c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+..+c_ny_n^{(n-1)}(t_0)=y^{(n-1)}(t_0)$

με αγνώστους τις σταθερές $c_1,..,c_n$.
Επειδή, η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι η ορίζουσα Wronski του συνόλου των λύσεων $\{y_1(t),..,y_n(t), t\in I\}$ και οι λύσεις $\{y_1(t),..,y_n(t), t\in I\}$ είναι γρ. ανεξάρτητες, θα είναι $W(y_1,..,y_n)(t_0)\neq 0$ και συνεπώς το γρ. σύστημα έχει ακριβώς μία λύση $c_1,..,c_n$.
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση:
$y_0(t)=c_1y_1(t)+..+c_ny_n(t)$, $t\in I$, είναι λύση του συστήματος, για την οποία έχουμε: $y_0(t_0)=y(t_0)$, $y'(t_0)=y'(t_0)$..., έπεται ότι $y\equiv y_0$

Παρατηρήσεις: - Προσδιορισμός λύσεων από δοσμένες συνθήκες
- Ο χωρός των λύσεων της ομογενούς γ.δ.ε. (E_n^0): διάσταση και βάσεις
- Ποιοτικά χαρακτηριστικά λύσεων.

Πχ Να προσδιοριστεί η λύση της εξίσωσης $y'''(t)=0$ με $y_0(1)=1$, $y_0'(1)=2$, $y_0''(1)=3$ αν είναι γνωστό ότι ένα σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το $S=\{1,t,t^2\}$.

Λύση: Αρχικά, παρατηρούμε ότι το σύνολο S είναι βασικό σύνολο λύσεων. Για την εύρεση της ζητούμενης λύσης θέτουμε:
$y_0=c_1+c_2t+c_3t^2$ και έχουμε:
$1=y_0(1)=c_1+c_2+c_3$, $2=y_0'(1)=c_2+2c_3$, $3=y_0''(1)=2c_3$

Θεώρημα (8): Αν $S=\{y_1(t),\ldots,y_n(t), t\in C^{(n)}(I)\}$ για τις οποίες είναι $W(y_1,\ldots,y_n)(t)\neq 0$, $t\in I$, τότε υπάρχει ακριβώς μία ομογενής γ.δ.ε. n-τάξης (E_n^0) με συντελεστή του y^n την μονάδα και τέτοια ώστε το σύνολο S να είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (E_n^0)

Απόδειξη: Παρατηρείστε ότι η εξίσωση

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{W(y_1,\ldots,y_n)(t)}\begin{vmatrix} y(t) & y'(t) & \ldots & y^{(n-1)}(t) & y^{(n)}(t) \\ y_1(t) & y_1'(t) & \ldots & y_1^{(n-1)}(t) & y_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n-1}(t) & y_{n-1}'(t) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(t) & y_{n-1}^{(n)}(t) \\ y_n(t) & y_n'(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) & y_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}=0$$

είναι μία ομογενής γ.δ.ε n-τάξης ε συντελεστή του y^n την μονάδα και το σύνολο S είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων.
Το μονοσήμαντο της εξίσωσης ως άσκηση.

Πχ Η μοναδική εξίσωση τρίτης τάξης με συντελεστή του y''' τη μονάδα και βασικό σύνολο το $\{1,t,t^2\}$ είναι η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ t^2 & 2t & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$